

# Deskriptivní geometrie pro střední školy

Mongeovo promítání

2. díl

Ivona Spurná

# Deskriptivní geometrie – Mongeovo promítání, 2. díl

Mgr. Ivona Spurná

Jazyková úprava: PhDr. Dagmar Procházková

Návrh vnitřního layoutu: Pavel Navrátil

Zlom a sazba: Jan Paroulek

Návrh obálky: Ing. Michal Jiříček

Interní verze: 1.0

© Computer Media s.r.o.

Vydání první, 2010

Všechna práva vyhrazena

ISBN: 978-80-7402-067-4

Žádná část této publikace nesmí být publikována a šířena žádným způsobem a v žádné podobě bez písemného svolení vydavatele.

Computer Media, s.r.o.

Hrubčická 495

798 12 Kralice na Hané

Telefon: +420 582 302 666

Fax: +420 582 302 667

E-mail: [info@computermedia.cz](mailto:info@computermedia.cz)

WWW: <http://www.computermedia.cz>

Zajímá nás Váš názor!

Líbí se Vám tato učebnice? Co v ní postrádáte? Své tipy, postřehy a názory pište na adresu:

[info@computermedia.cz](mailto:info@computermedia.cz). Děkujeme Vám.

Nakladatelství a vydavatelství  
**Computer Media**  
[www.computermedia.cz](http://www.computermedia.cz)

Partnerským serverem této knihy je  
[www.iskola.cz](http://www.iskola.cz)

**iškola.cz**  
Vaše elektronická škola

# TEMATICKÉ ROZDĚLENÍ DÍLŮ KNIHY DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

## 1. díl

- Úvod – Gaspard Monge
- Souřadný systém, zobrazení bodu
- Zobrazení přímky
- Stopníky obecné přímky
- Sklopení přímky
- Zobrazení roviny
- Bod a přímka v rovině, odchylka roviny od průmětny
- Obrazce v rovině
- Vzájemná poloha dvou rovin, průsečnice rovin
- Průsečík přímky s rovinou
- Průnik rovinných obrazců
- Kolmost přímky a roviny
- Otočení roviny do průmětny, osová afinita

## 2. díl

- Zobrazení hranolu
- Řez hranolu
- Síť hranolu
- Průsečík přímky s hranolem
- Zobrazení jehlanu
- Středová kolineace a řez jehlanu
- Síť jehlanu
- Průsečík přímky s jehlanem
- Kuželosečky
- Zobrazení válce
- Řez válce
- Síť válce
- Průnik přímky s válcem
- Zobrazení kuželu
- Řez kuželu
- Síť kuželu
- Průsečíky přímky s kuželem
- Koule – zobrazení, řez, průnik s přímkou
- Průnik těles

# OBSAH 2. DÍLU

<b>14 Zobrazení hranolu.....</b>	<b>6</b>
Příklad – kolmý hranol.....	6
Příklad – pravidelný hranol s podstavou v nárysně.....	8
Příklad – kosý hranol s podstavou v nárysně.....	9
Příklad – kolmý hranol s podstavou v obecné rovině.....	9
Cvičení – sestrojení hranolu.....	16
<b>15 Řez hranolu.....</b>	<b>17</b>
Příklad – řez kolmého hranolu rovinou.....	17
Příklad – řez kosého hranolu rovinou.....	18
Cvičení – řez hranolu.....	21
<b>16 Síť hranolu.....</b>	<b>22</b>
Příklad – síť kolmého hranolu.....	22
Příklad – síť kosého hranolu.....	23
Příklad – síť kosého hranolu.....	30
Cvičení – síť hranolu.....	30
<b>17 Průsečík přímky s hranolem.....</b>	<b>32</b>
Příklad – průsečík přímky s kolmým hranolem.....	32
Příklad – průsečík přímky s kosým hranolem.....	34
Cvičení – průsečík přímky s hranolem.....	35
<b>18 Zobrazení jehlanu.....</b>	<b>36</b>
Příklad – zobrazení pravidelného jehlanu.....	36
Příklad – zobrazení kosého jehlanu.....	36
Příklad – pravidelný jehlan s podstavou v obecné rovině.....	37
Cvičení – zobrazení jehlanu.....	40
<b>19 Středová kolineace a řez jehlanu.....</b>	<b>41</b>
Středová kolineace.....	41
Příklad – středová kolineace.....	42
Příklad – rovinný řez jehlanu.....	42
Příklad – řez kosého jehlanu a velikost řezu.....	45
Cvičení – řez jehlanu.....	47
<b>20 Síť jehlanu.....</b>	<b>49</b>
Příklad – síť pravidelného jehlanu.....	49
Příklad – síť kosého jehlanu.....	50
Cvičení – síť jehlanu.....	52
<b>21 Průsečík přímky s jehlanem.....</b>	<b>53</b>
Příklad – průsečík přímky s jehlanem.....	53
Cvičení – průsečík přímky s jehlanem.....	56
<b>22 Kuželosečky.....</b>	<b>57</b>
Elipsa.....	58
Hyperbola.....	59
Parabola.....	61

<b>23 Zobrazení válce</b> .....	<b>63</b>
Příklad – průmět rotačního válce.....	63
Příklad – průměty kosého válce.....	63
Příklad – průměty rotačního válce v obecné poloze.....	64
Cvičení – průměty válce.....	67
<b>24 Řez válce</b> .....	<b>68</b>
Příklad – eliptický řez na válci.....	69
Rytzova konstrukce.....	71
Cvičení – řez válce.....	72
<b>25 Sít válce</b> .....	<b>73</b>
Příklad – síť rotačního válce.....	73
Příklad – řez válce a síť.....	74
Cvičení – síť válce.....	76
<b>26 Průnik přímky s válcem</b> .....	<b>77</b>
Příklad – průnik přímky s kolmým válcem.....	77
Příklad – průnik přímky s kosým válcem.....	78
Cvičení – průnik přímky s válcem.....	81
<b>27 Zobrazení kuželu</b> .....	<b>82</b>
Příklad – tečny elipsy.....	82
Příklad – rotační kužel s podstavou v půdorysně.....	83
Příklad – rotační kužel s podstavou v obecné rovině.....	84
Cvičení – zobrazení kuželu.....	87
<b>28 Řez kuželu</b> .....	<b>88</b>
Příklad – eliptický řez kuželu.....	88
Příklad – parabolický řez kuželu.....	91
Příklad – hyperbolický řez kuželu.....	92
Cvičení – řez kuželu.....	94
<b>29 Sít kuželu</b> .....	<b>95</b>
Příklad – síť rotačního kuželu.....	95
Příklad – řez kuželu a jeho síť.....	96
Cvičení – síť kuželu.....	98
<b>30 Průsečíky přímky s kuželem</b> .....	<b>99</b>
Příklad – průsečíky přímky s kuželem.....	99
Cvičení – průsečíky přímky s kuželem.....	100
<b>31 Koule – zobrazení, řez, průnik s přímkou</b> .....	<b>101</b>
Příklad – řez koule.....	102
Příklad – průnik přímky a koule.....	103
<b>32 Průnik těles</b> .....	<b>105</b>
Příklad – průnik hranolů.....	105
Příklad – průnik kuželu a hranolu.....	110

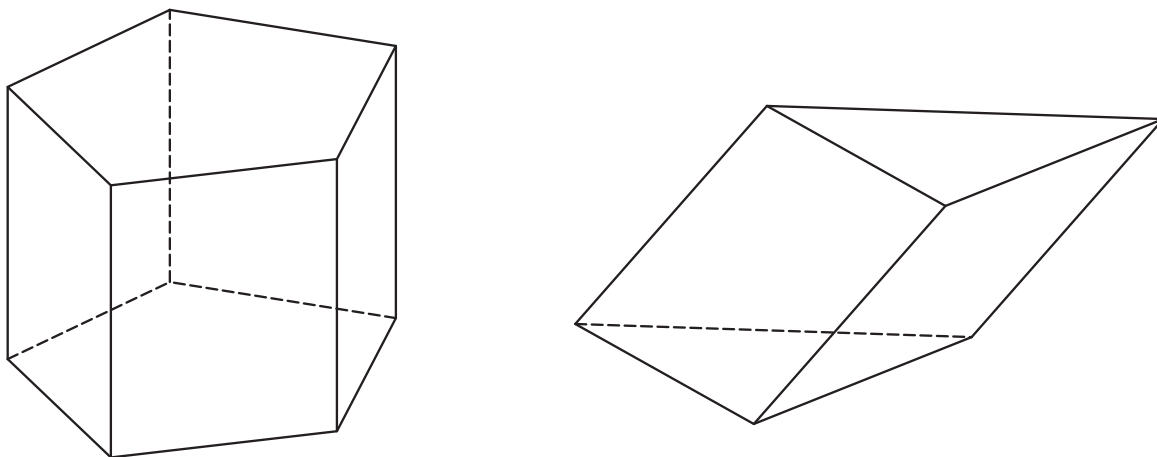
## 14 ZOBRAZENÍ HRANOLU

Hranol je těleso, které má dvě stěny rovnoběžné, ty se nazývají podstavy. Podstavy jsou shodné a jsou spojené bočními stěnami.

Hrany ležící v podstavě jsou podstavné hrany, hrany v bočních stěnách neležící v podstavě jsou boční hrany.

Pokud jsou boční hrany kolmé na podstavu, jedná se o **kolmý** hranol, v opačném případě se jedná o **kosý** hranol (obr. 14-1).

Jestliže je podstava pravidelný mnohoúhelník a hranol je kolmý, jedná se o pravidelný hranol.



Obr. 14-1

### Příklad – kolmý hranol

Sestrojte průměty pravidelného šestibokého hranolu, jehož dolní podstava leží v půdorysně, podstava je dána středem  $S$  a vrcholem  $A$  a výška hranolu je  $v$ .

#### Řešení:

Sestrojte půdorys podstavy – šestiúhelník, který je dán svým středem a vrcholem.

**Pro připomenutí základní konstrukce šestiúhelníka čtete následující:**

Šestiúhelník sestojíte například tak, že narýsujete kružnici opsanou danému šestiúhelníku (střed v bodě  $S_1$  a poloměr je  $|S_1A_1|$ ), od bodu  $A$  nanesete pomocí kružítka velikost poloměru kružnice po obvodu kružnice – tím získáte další vrcholy šestiúhelníka.

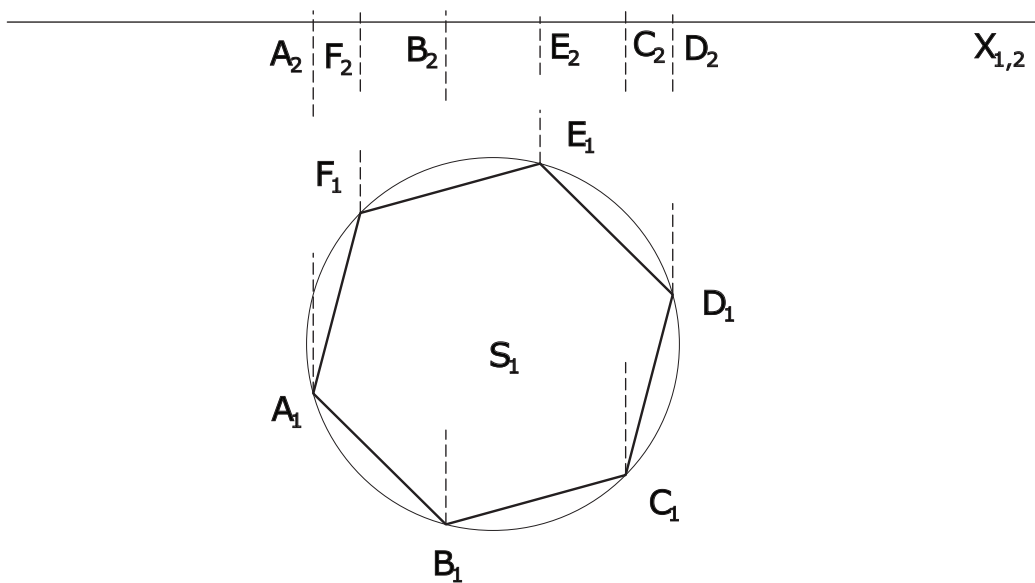
Spojením bodu  $A_1$  až  $F_1$  dostáváte půdorys dolní podstavy hranolu.

Nárýsy těchto bodů leží na příslušných ordinálách a základnici  $x_{1,2}$  (celá půdorysna se v nárýsu promítá do základnice) – obr. 14-2.

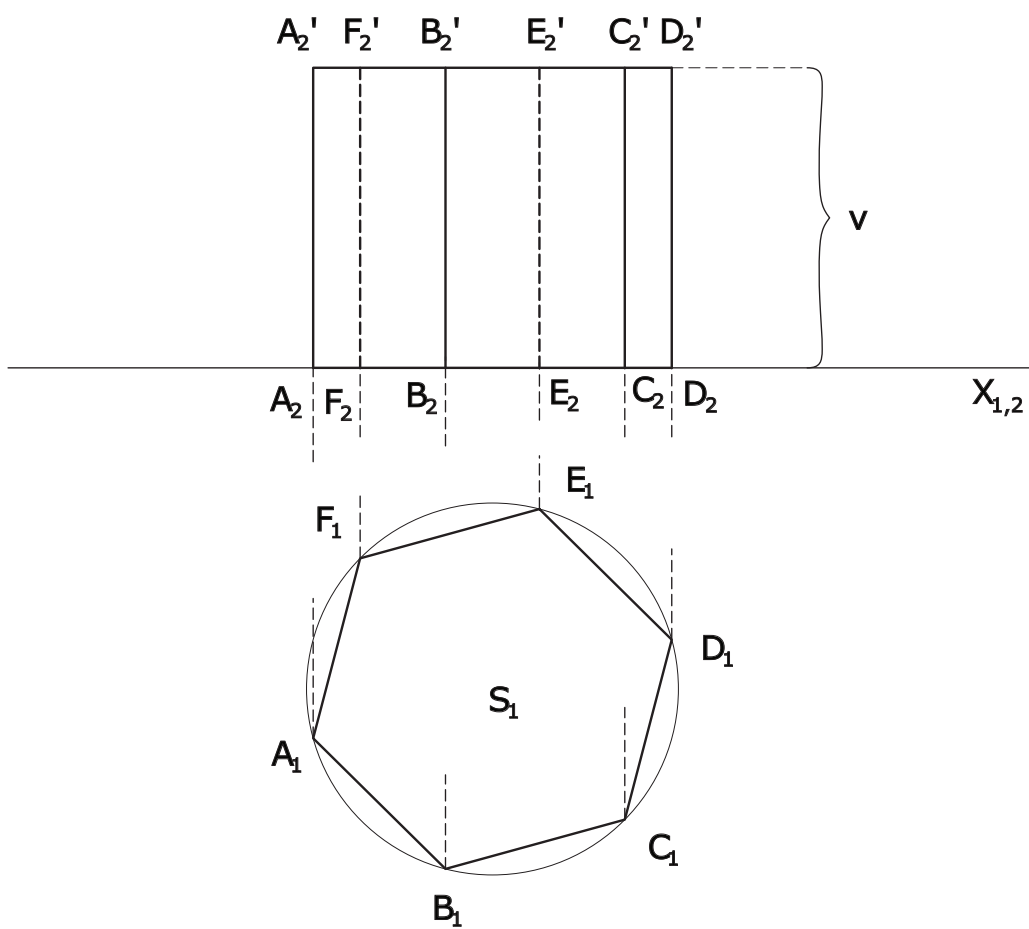
Protože se jedná o kolmý hranol, jsou jeho boční hrany kolmé na půdorysnu, a tudíž se v nárýsu promítají do kolmic k základnici. Vždy procházejí příslušným nárýsem bodu podstavy.

Výška je dána –  $v$ , tu naneste na nárýsy bočních hran od základnice. Velikost se v tomto případě nezkrusluje, protože jsou hrany rovnoběžné s nárýsnou. Nanesením výšky  $v$  na boční hrany dostanete nárýsy bodů horní podstavy ( $A_2'B_2'C_2'D_2'E_2'F_2'$ ). Horní podstava se v nárýsu promítá do úsečky rovnoběžné se základnicí (obr. 14-3).

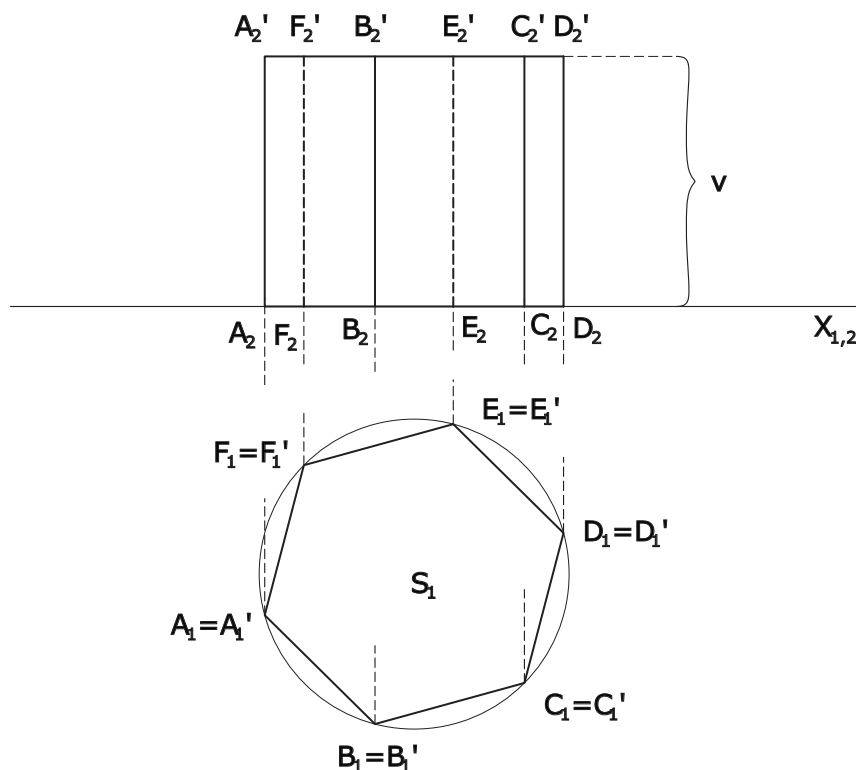
Půdorys horní podstavy ( $A_1'B_1'C_1'D_1'E_1'F_1'$ ) splývá s půdorysem dolní podstavy ( $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ ), protože se jedná o kolmý hranol a podstavy leží nad sebou ve směru promítání (obr. 14-4).



Obr. 14-2



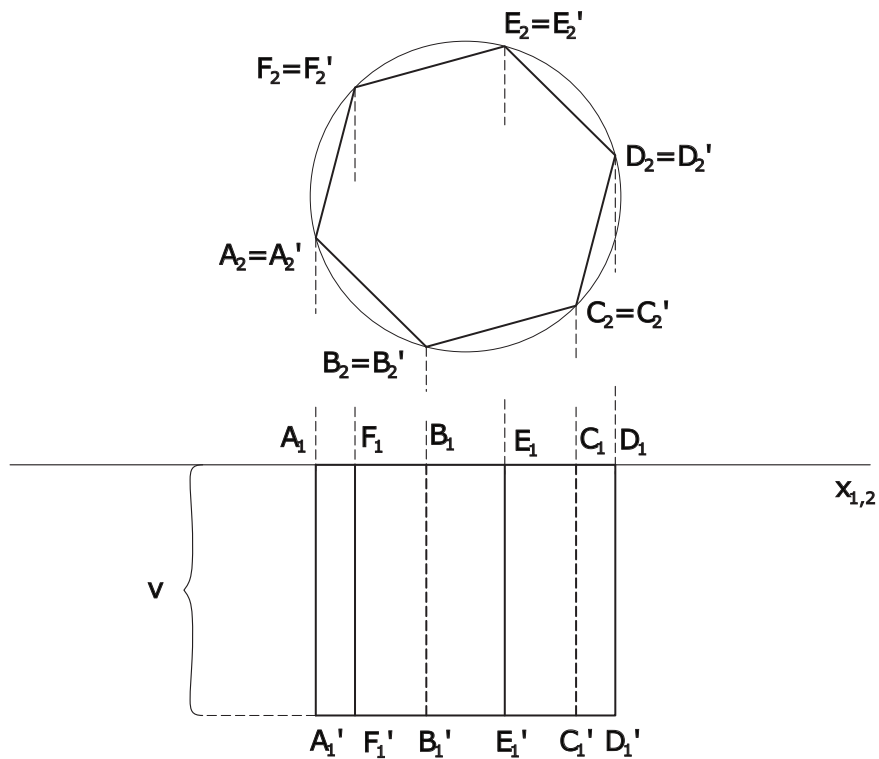
Obr. 14-3



Obr. 14-4

### Příklad – pravidelný hranol s podstavou v nárysně

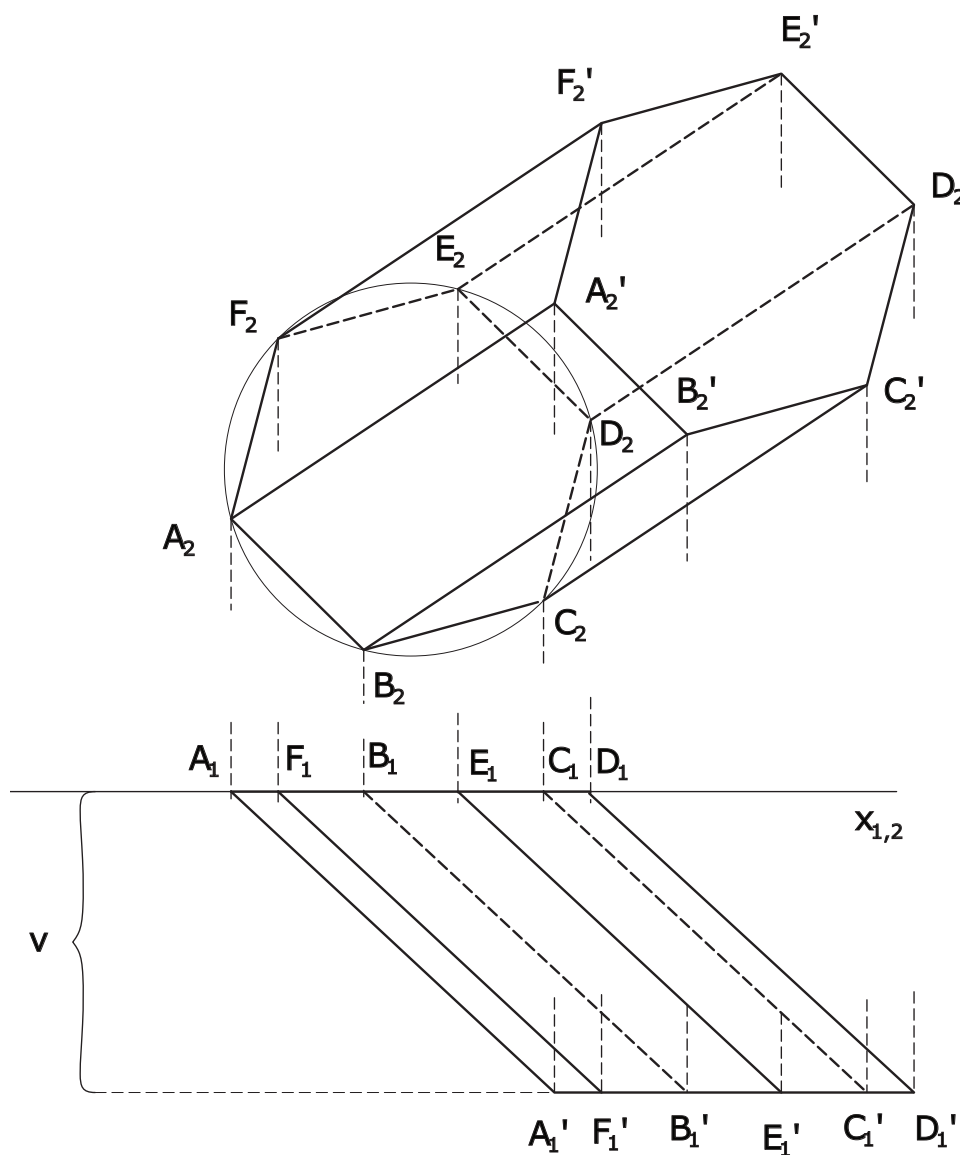
Naprosto obdobným způsobem jako v předchozím příkladu sestrojíte hranol, jehož podstava leží v nárysně. Musíte jen dát pozor na pojmenování a indexování bodů, jinak postupujte analogicky (obr. 14-5).



Obr. 14-5

## Příklad – kosý hranol s podstavou v nárysně

Pro představu, jak se zobrazuje kosý hranol s podstavou v nárysně, se podívejte na obr. 14-6. Vše je analogické s předchozími příklady, jen osa hranolu není kolmá na rovinu podstavy.



Obr. 14-6

## Příklad – kolmý hranol s podstavou v obecné rovině

Poněkud složitější a konstrukčně náročnější je situace, kdy hranol stojí na obecné rovině. Zde využijete některé základní konstrukce popsané dříve.

Například může jít o čtyřboký hranol, jehož podstavou má být čtverec ležící v zadané rovině, a tento čtverec je například dán svým středem a vrcholem.

Nejprve musíte rovinu, ve které čtverec leží, otočit, v otočení sestrojíte čtverec a afinitou jej vrátit zpět do původního průmětu. Tím získáte zkreslený průmět podstavného čtverce. Druhý průmět čtverce odvodíte pomocí hlavních přímek a ordinál.

Pak budete muset sestrojít boční hrany hranolu, které jsou kolmé na rovinu podstavy. Připomeňte si, jak se konstruují kolmice k rovině!

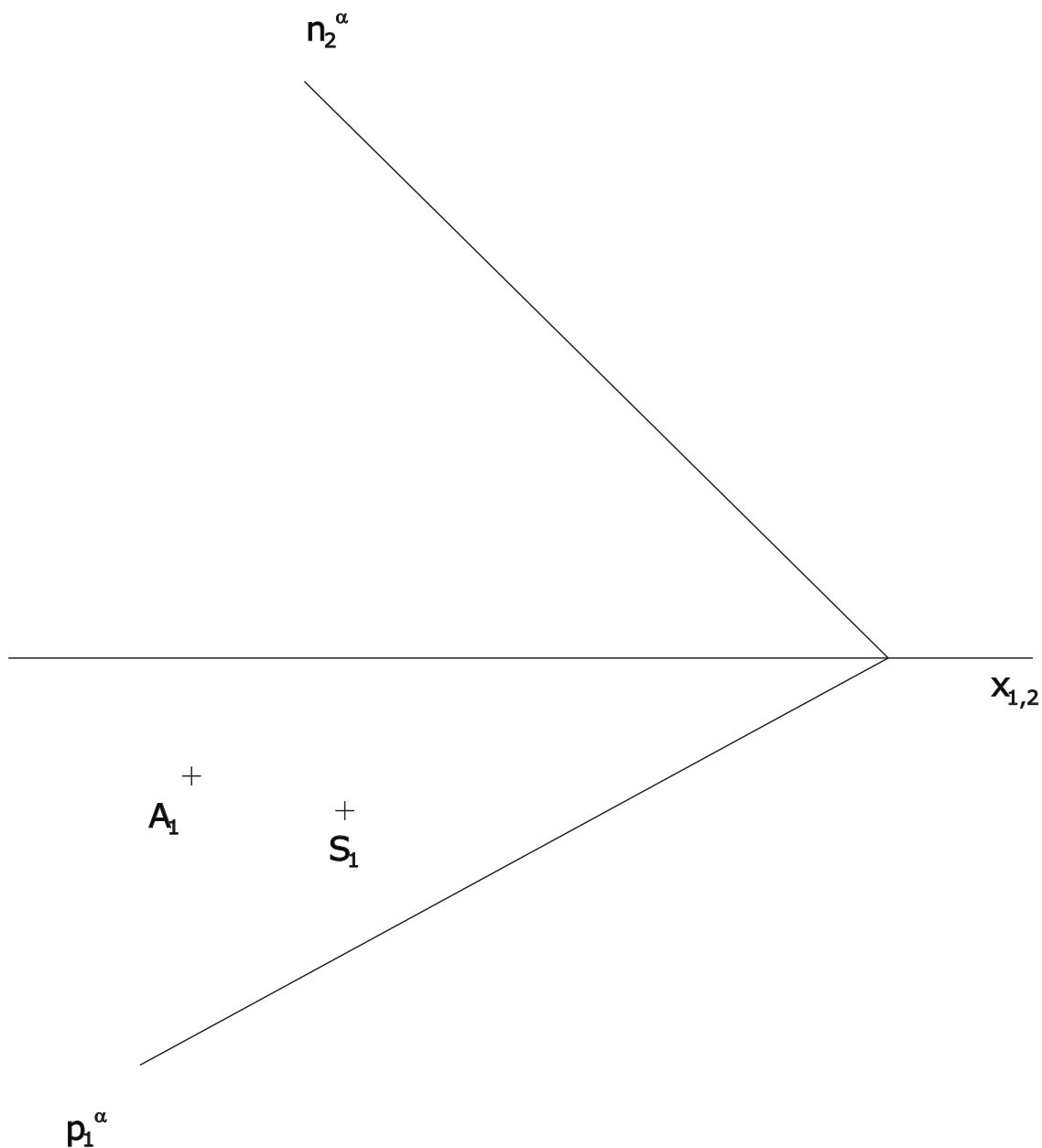
Na tyto kolmice budete muset nanést (stačí na jednu z nich) skutečnou zadanou velikost boční hrany. Abyste to mohli provést, musíte boční hranu sklopit a ve sklopení zadanou výšku nanést. V průmětu se bude délka zkracovat. Také lze využít boční pohled na konstruovaný hranol, kde je výška vidět v nezkrácené podobě (třetí průmět).

Jakmile zjistíte, jak se výška zkrasí, je již vše prakticky hotovo – stejnou zkreslenou výšku naneste i na ostatní boční hrany. Druhý průmět odvodíte pomocí ordinál na příslušné boční hrany.

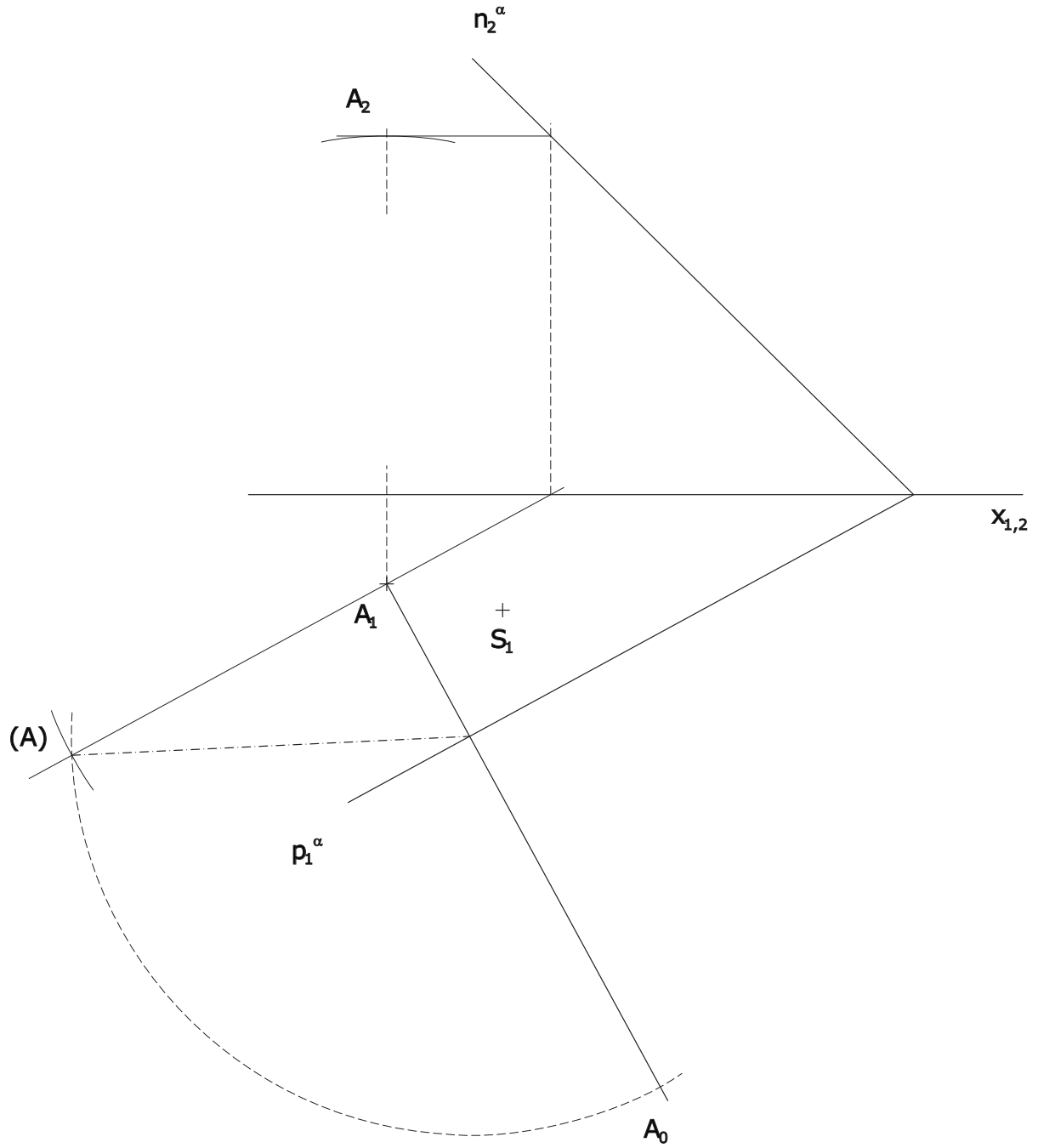
Vidíte sami, že konstrukce takto obecně položeného hranolu sestává v podstatě z otočení roviny, afinity a sklopení úsečky. Všechny tyto úlohy byly již probrány, proto s vynaložením příslušného úsilí a přesnosti byste měli získat správný výsledek.

Pro zopakování je celá konstrukce popsána a podrobněji nakreslena níže.

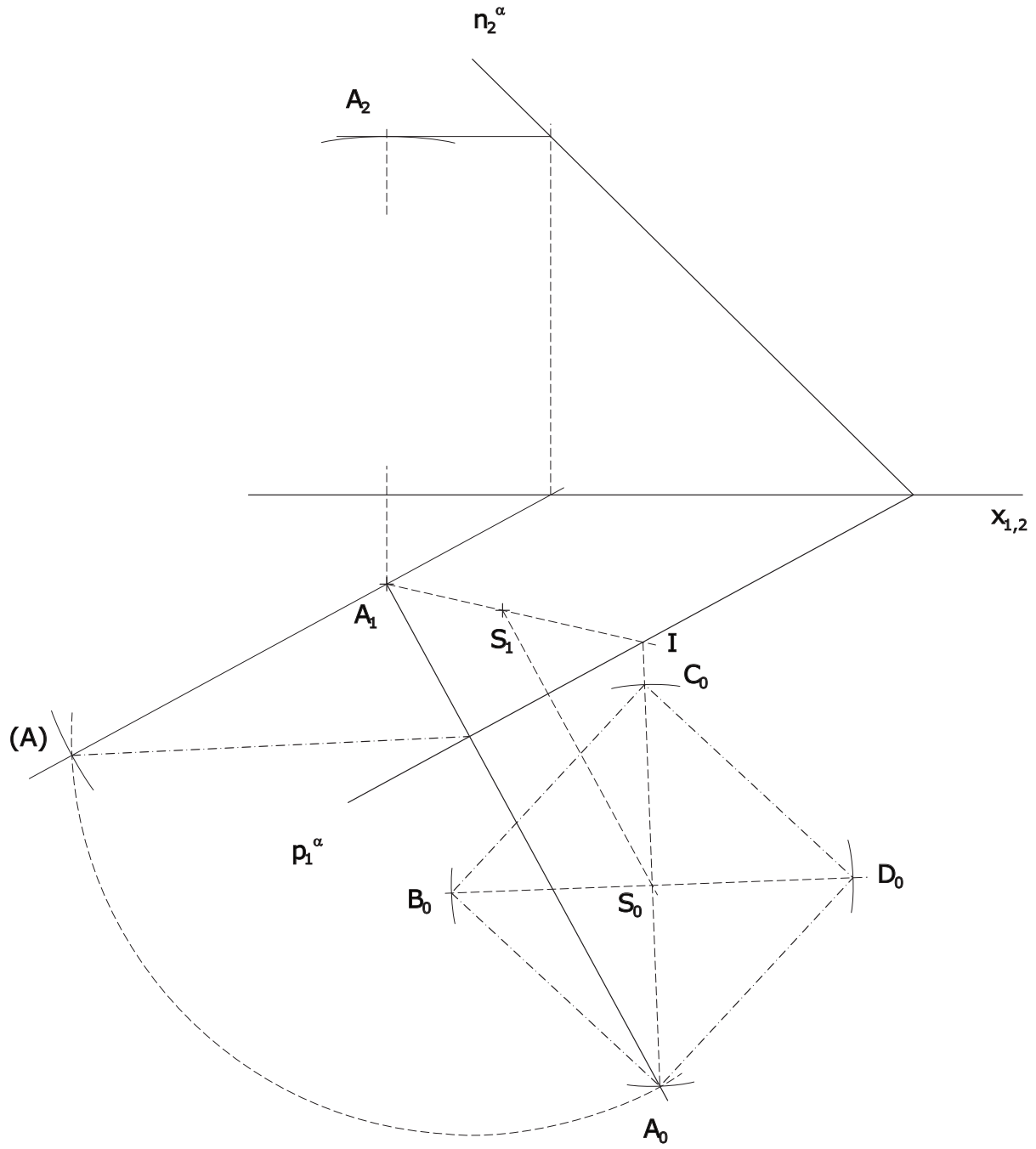
Na obr. 14-7 až obr. 14-10 je konstrukce čtverce ležícího v rovině  $\alpha$ . Čtverec je zadán středem **S** a vrcholem **A**. Rovina se otočí kolem své půdorysné stopy do půdorysny a v otočení se sestrojí čtverec. Afinitou se vrátí do půdorysu. Pomocí hlavních přímek roviny se dohledají nárysy vrcholů čtverce.



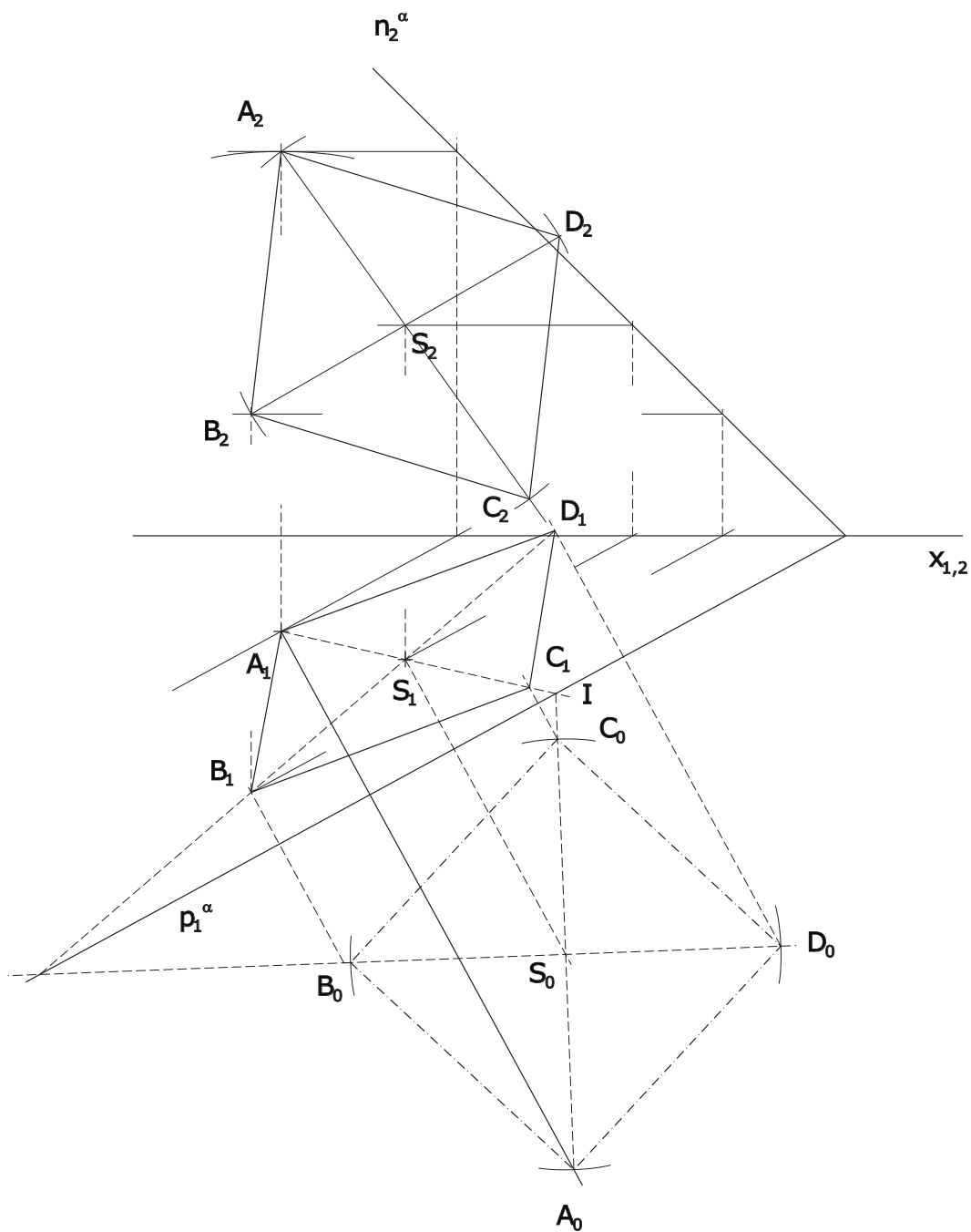
Obr. 14-7



Obr. 14-8



Obr. 14-9



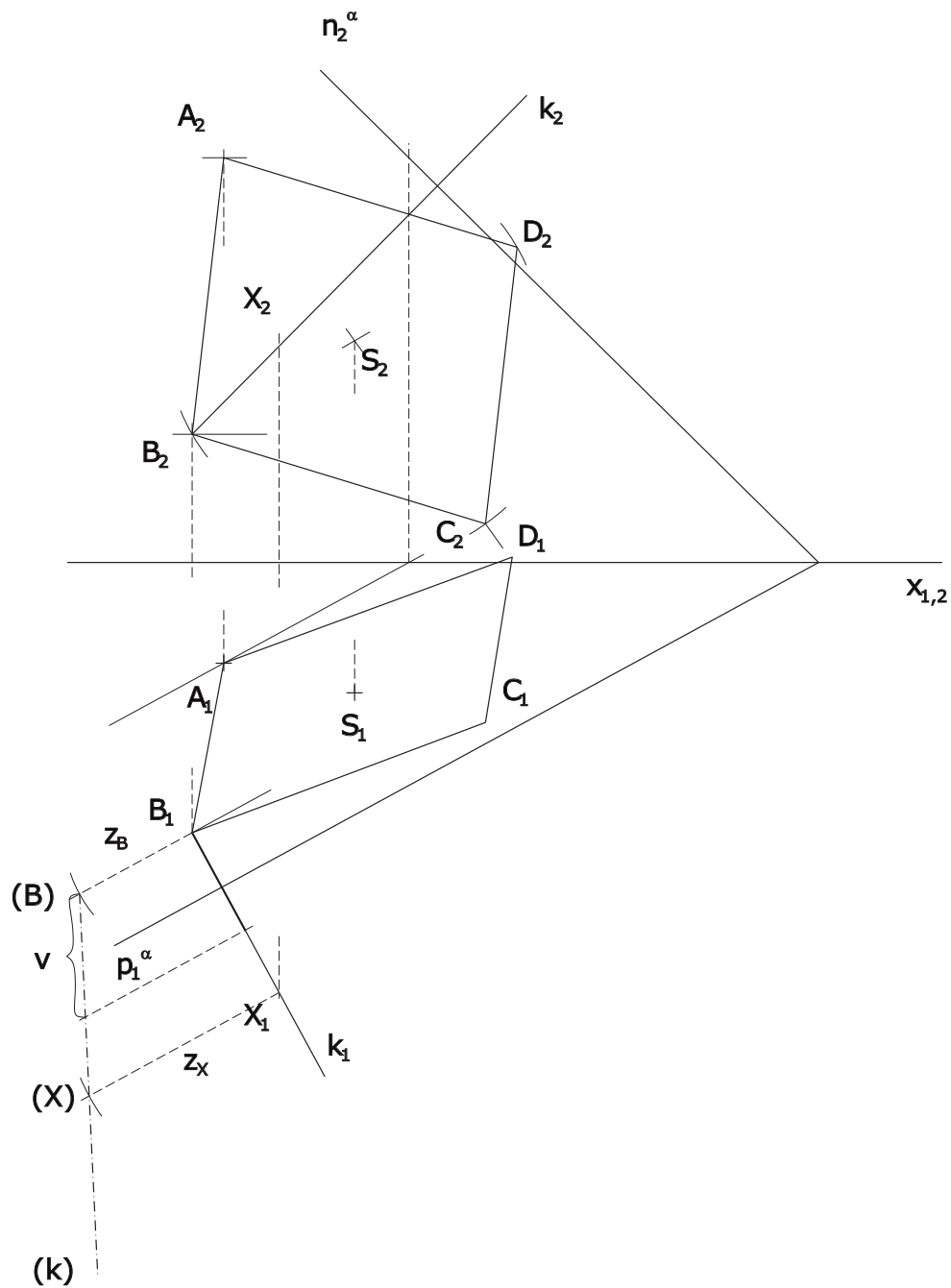
Obr. 14-10

Nyní je již sestrojena dolní podstava hranolu. Dále budou konstruovány boční hrany hranolu. Protože jde o hranol kolmý, jsou boční hrany kolmice k rovině podstavy, tj. k rovině  $\alpha$ .

Sestrojte kolmici  $\mathbf{k}$  například bodem  $\mathbf{B}$ . V nárysu i půdorysu se zobrazuje jako přímka kolmá ke stopám.

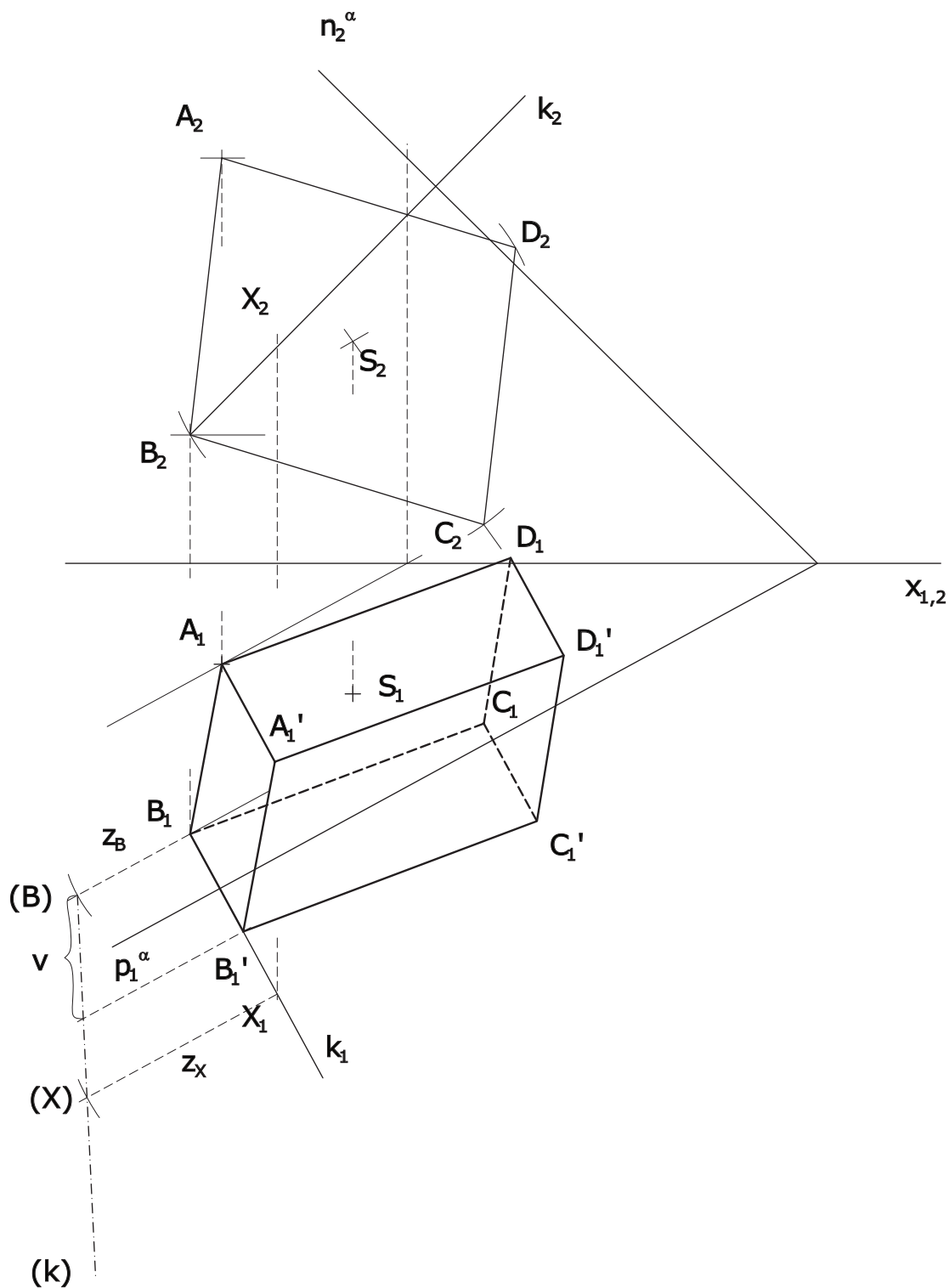
Na kolmici zvolte kromě bodu  $\mathbf{B}$  ještě jeden bod, označte ho například  $\mathbf{X}$ . Jestliže máte na přímce určeny dva body, umíte zjistit z nárysu jejich **z-ové** souřadnice a ty použít pro sklopení přímky do půdorysu.

Ve sklopení naneste skutečnou výšku  $v$ , a její zkreslenou velikost v půdorysu odvodíte pomocí rovnoběžky s půdorysnou stopou (obr. 14-11).



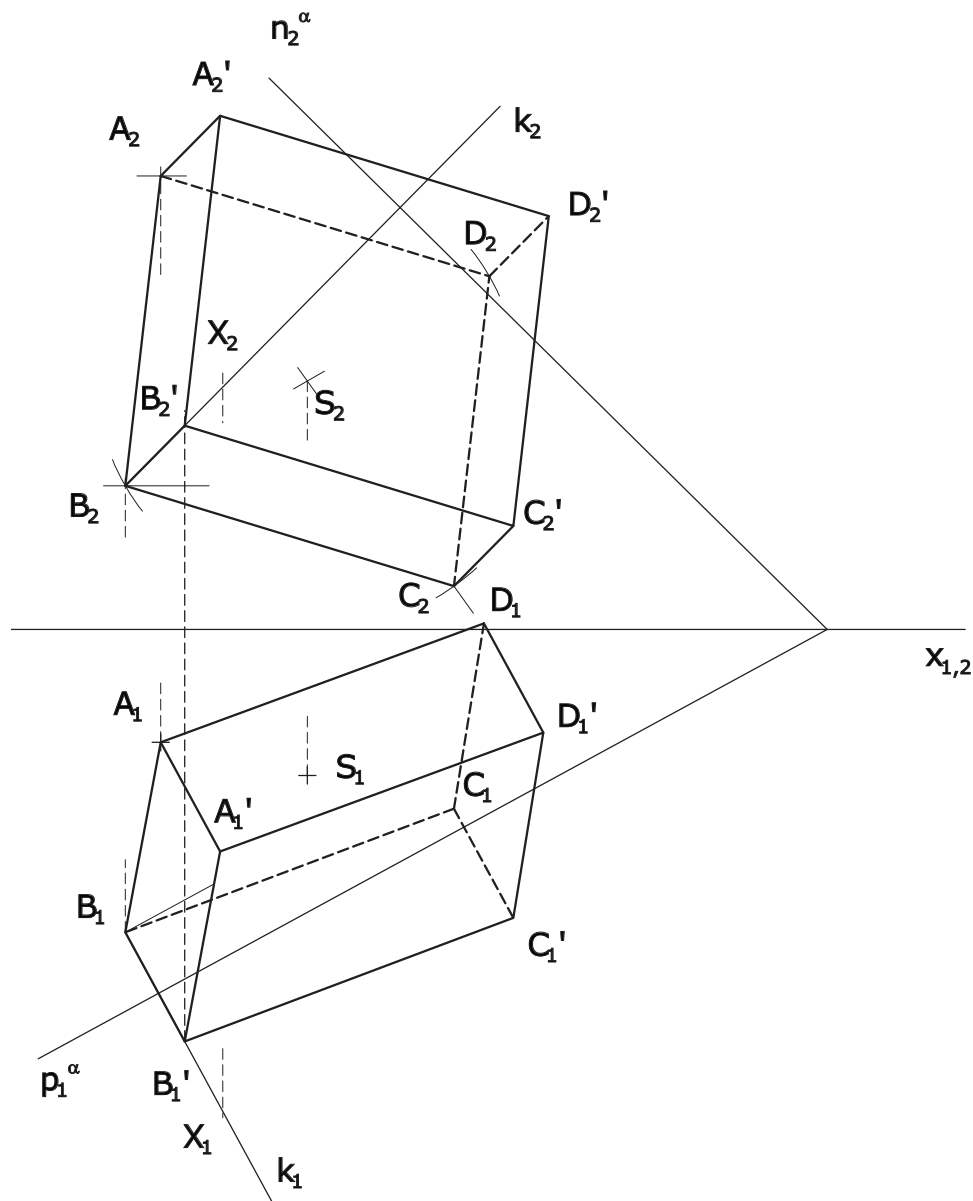
Obr. 14-11

Zkreslenou výšku nanesete i na ostatní boční hrany v půdorysu (kolmice k půdorysné stopě) – obr. 14-12. Tím získáte umístění vrcholů horní podstavy – body  $A_1'$  až  $D_1'$ . Můžete sestrojít půdorys hranolu.



Obr. 14-12

Nyní pro narýsování nárysu hranolu zbývá zjistit, jak se zakreslí výška hranolu v nárysu. Stačí vést bodem  $B_1'$  ordinálu a najít nárys bodu  $B_2'$  na příslušné kolmici  $k$ . Body  $C_2'$ ,  $D_2'$  a  $A_2'$  najdete tak, že nanesete zkreslenou výšku v nárysu i na ostatní kolmice (boční hrany) procházející body  $A_2'$ ,  $C_2'$  a  $D_2'$  (obr. 14-13).



Obr. 14-13

## Cvičení – sestrojení hranolu

- Sestrojte pravidelný šestiboký hranol s dolní podstavou v půdorysně a výškou **4 cm**. Dolní podstava je dána protilehlými vrcholy  $A[0; 4; 0]$  a  $D[2; 6; 0]$ .
- Sestrojte kosý trojboký hranol, jehož zadní podstava leží v nárysně a je tvořena rovnostranným trojúhelníkem  $ABC$ .  $A[0; 0; 1]$ ,  $B[3; 0; 1]$ ,  $C$  má kladnou **z-ovou** souřadnici. Vrchol přední podstavy  $C'$  má souřadnice  $C'[6; 4; 6]$ .
- Sestrojte kolmý čtyřboký hranol, který má výšku **8 cm**, dolní podstava leží v rovině  $\alpha(-5; 8; 2)$  a je jí obdélník, který je dán vrcholy  $A[-1; 1; ?]$ ,  $B[-2; 2; ?]$ ,  $C$  je dán vlastností, že **y-ová** souřadnice bodu  $C$  je větší než **y-ová** souřadnice bodu  $B$  a délka strany  $BC$  je dvojnásobná než délka strany  $AB$  (pozor na zakreslení velikostí úseček ležících v rovině – musíte nejprve rovinu otočit a obdélník sestrojít v otočení).